مروری بر ساختار و رویکردهای آموزشی کتاب‌های ریاضی مدرسه ای ایران

قسمت اول- ۲۳ شهریور ۱۳۹۹

ابراهیم ریحانی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

برخی از کتاب ها پس از حدود ربع قرن یا بیشتر از آن تغییر کردند.

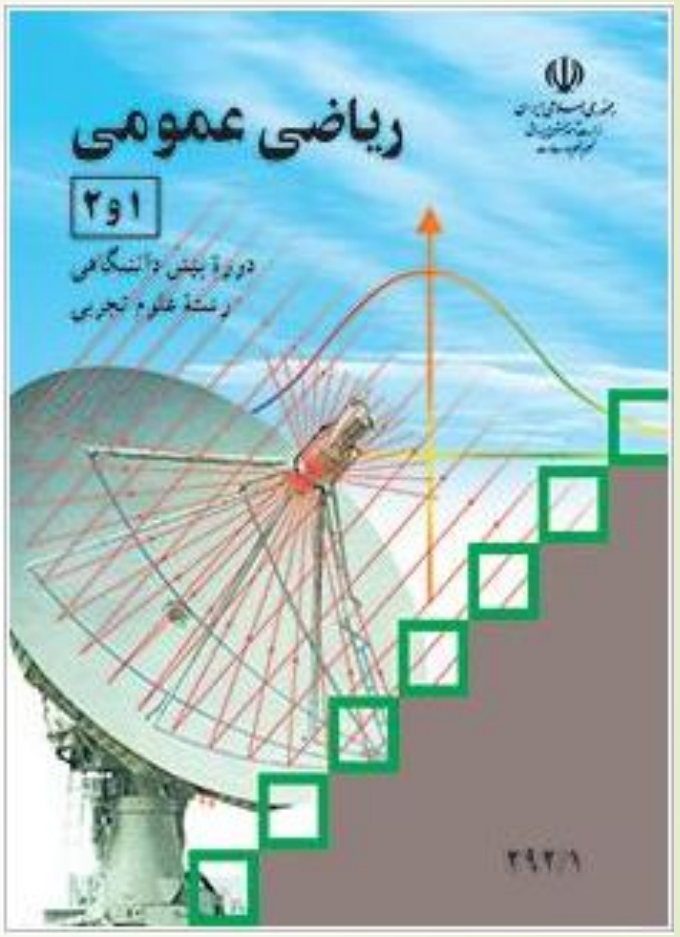
وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب :	ریاضی عمومی (۱) و (۲) دورهٔ پیش‌دانشگاهی ـ ۲۹۲/۱
پدیدآورنده :	سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف :	دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف :	یحیی تابش، محمّدحسن بیژن‌زاده، امیر نادری، حمیده داریوش همدانی و جواد حاجی بابائی (اعضای شورای برنامه‌ریزی) محمّدحسن بیژن زاده، عین‌الله بابا و که کو یوحنایی (اعضای گروه تألیف)
مدیریت آماده‌سازی هنری :	ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی :	لیدا نیک‌روش (مدیر امور فنی و چاپ) ـ محمّد حسن معماری (طراح جلد) ـ مریم نصرتی (صفحه‌آرا) ـ فاطمه رئیسیان فیروزآباد، فاطمه باقری‌مهر، فاطمه گیتی‌جبین، زهرا رشیدی‌مقدم، زینت بهشتی‌شیرازی، حمید ثابت کلاچاهی، ناهید خیام‌باشی (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان :	تهران : خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی) تلفن : ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
ناشر :	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن : ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۳۷۵۱۵ـ۱۳۹
چاپخانه :	شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ :	چاپ بیست‌وسوم ۱۳۹۶

برای دریافت فایل pdf کتاب‌های درسی به پایگاه کتاب‌های درسی به نشانی www.chap.sch.ir و برای خرید کتاب‌های درسی به سامانه فروش و توزیع مواد آموزشی به نشانی www.irtextbook.ir یا www.irtextbook.com مراجعه نمایید.

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به‌صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکسبرداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

شابک ۸-۰۱۰۱-۰۵-۹۶۴ ISBN 964-05-0101-8



در نگارش کتاب های جدید،تغییرات در حجم، ساختار، محتوا و فرآیندهای ارائه محتوا صورت گرفت. این تغییرات مبتنی بر اسناد و قوانین بالادستی، پژوهش های معتبر داخلی و بین المللی و استفاده از خرد جمعی صورت گرفت.

ریاضی مقطع ابتدایی ۳۰سال بدون تغییر/جزئیات تغییر روش تدریس ریاضی در مدارس

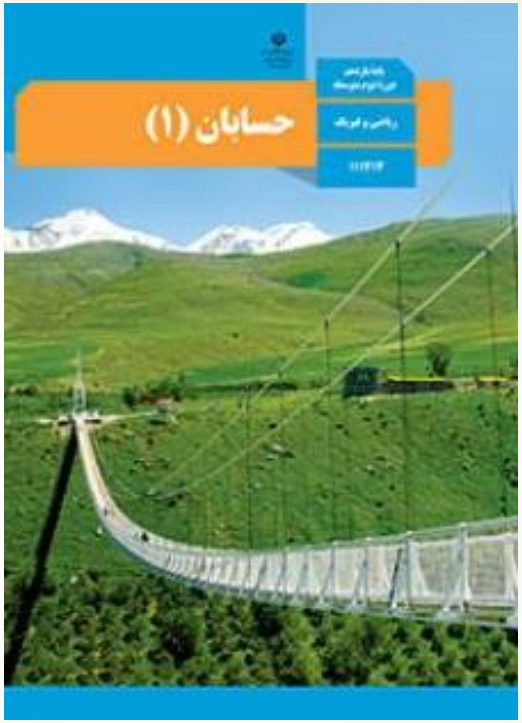
۲۶ شهریور ۱۳۹۲ - ۰۰:۱۵ | اخبار اجتماعی | اخبار فرهنگیان و مدارس |

خبرگزاری تسنیم:، معاون آموزش ابتدایی دفتر تالیف کتاب‌های درسی با اشاره به جای خالی پرورش تفکر در کتاب‌های درسی و تغییر کتب با رویکرد تقویت خلاقیت گفت: ریاضی مقطع ابتدایی ۳۰ سال بدون تغییر باقی مانده بود.

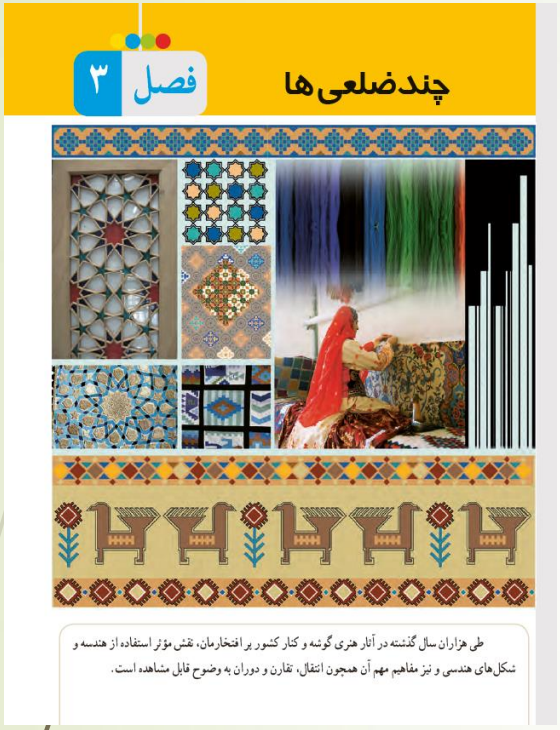
مؤلفین کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی، دوره اول متوسطه و دوره دوم متوسطه نظری

ساختار کتاب های درسی ریاضی

- فعالیت
- کار درکلاس
- تمرین
- تصویر عنوانی
- بازی و ریاضی
- معما و سرگرمی
- مرور فصل

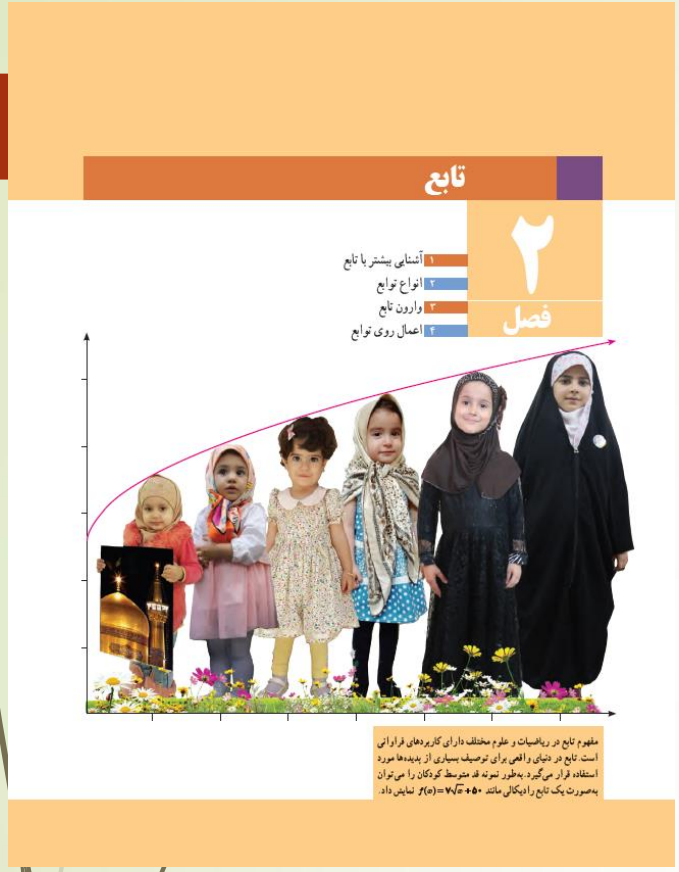


تصویر جلد کتاب حسابان۱



تصویر عنوانی فصل سوم
ریاضی پایه هشتم

برخی از ویژگی ها در ارائه محتوا



- توجه اساسی به رویکرد حل مسئله.
- تکیه بر دانش قبلی دانش آموزان.
- کاربردهای ریاضی در زندگی واقعی.
- تعادل بین دانش مفهومی و دانش رویه ای.
- حرکت از شهود به تجرید.
- توجه به فرهنگ ایرانی اسلامی.
- توجه به تفاوت های فردی دانش آموزان
- استفاده از سطح تجرید مناسب با دانش آموزان.
- توانایی نشان دادن ارتباطات بین مفاهیم ارائه شده.
- ایجاد یک جریان استقرایی وفراهم کردن فرصت کشف.

آموزش خوب چیست؟

دادن مجال به شاگرد است از طریقی منظم و اصولی، به نحوی که مطالب را خودش کشف کند(پولیا).

درکتاب های جدید ریاضی سعی شده است فرصت و مجالی برای یادگیری در اختیار دانش آموزان قرار داده شود.

فعالیت

طراحی فعالیت ها به منظور ایجاد فرصت هایی برای یادگیری معنی دار انجام شده است.

آنچه که در انجام یک فعالیت به طور عمده مدنظر بوده است، آشنایی دانش آموزان با مفهوم درسی وسهیم بودن در ساختن دانش مورد نظر است. فعالیت ها شامل مراحلی مانند درک کردن، کشف کردن، حل مسئله، طرح مسئله، استدلال کردن، بررسی کردن، حدس وآزمایش، طبقه بندی کردن، توضیح یک راه حل، اثبات کردن، رد کردن، مرتب کردن، تعمیم دادن، قضاوت درمورد یک راه حل و مقایسه راه حل های مختلف است.

کریستنسن و والتر(۱۹۸۶) به دنبال ویگوتسکی این دیدگاه را مطرح کردند که تکلیف، چیزی است که به دانش‌آموزان ارائه می‌شود یا آنان متعهد به اجرای آن می‌شوند و فعالیت، چیزی است که در تلاش برای اجرای توضیح و تفسیر تکلیف، روی می‌دهد(حل مسئلهٔ ریاضی، از نظریه تا عمل، ریحانی و حق جو ۱۳۹۹).

هدایت فعالیت ها توسط معلم انجام می پذیرد وهرجا که لازم باشد، راهنمایی توسط معلم ارائه خواهد شد.

کاردرکلاس با هدف تثبیت و تعمیق ودر مواردی تعمیم یادگیری طراحی شده است وانتظار این است که دانش آموزان بیشترین سهم را در حل آن داشته باشند.

حل تمرین به عهدهٔ دانش آموزان است، لیکن ارائه و بررسی پاسخ های دانش آموزان در کلاس ضروری است.

نمونه یک فعالیت در پایه ششم ابتدایی-فصل دوم- جمع و تفریق کسرها

فعّالیت

ناهید دیروز $\frac{۳}{۴}$ لیتر و امروز $\frac{۵}{۶}$ لیتر شیر نوشیده است. او می‌خواهد بداند در این دو روز روی هم چند لیتر شیر نوشیده است. راه‌حلّ او و دوستش را توضیح دهید. هر جا که لازم است راه‌حل را کامل کنید.

الف) ناهید ابتدا کسرهای مساوی $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۵}{۶}$ را با مخرج‌های برابر پیدا کرد و بعد پاسخ را به‌دست آورد :

$\frac{۳}{۴}=\frac{۱۸}{۲۴}$ $\qquad \frac{۵}{۶}=\frac{\square}{۲۴}$

$\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۶}=\frac{\square}{۲۴}+\frac{\square}{۲۴}=\frac{\square}{\square}=\frac{۱۹}{۱۲}=۱\frac{۷}{۱۲}$ لیتر

ب) مهدیه به روش دیگری عمل کرد. روش او و ناهید را با هم مقایسه کنید.

$\frac{۳}{۴}=\frac{۶}{۸}=\frac{۹}{۱۲}$

$\frac{۵}{۶}=\frac{۱۰}{۱۲}$

$\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۶}=\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{۱۲}=\frac{\square}{\square}=۱\frac{۷}{۱۲}$ لیتر

پ) شما کار مهدیه را ادامه دهید و کسرهای مساوی $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۵}{۶}$ را بنویسید.

$\frac{۳}{۴}=\frac{۶}{۸}=\frac{۹}{۱۲}=\frac{\square}{۱۶}=\frac{۱۵}{\square}=\frac{۱۸}{۲۴}=\frac{\square}{۲۸}=\frac{۲۴}{\square}=\frac{\square}{۳۶}$

کسرهای مساوی چگونه به‌دست آمده‌اند؟

$\frac{۵}{۶}=\frac{۱۰}{۱۲}=\frac{۱۵}{\square}=\frac{\square}{۲۴}=\frac{۲۵}{\square}=\frac{\square}{۳۶}$

در کسرهای بالا دو کسر دیگر با مخرج‌های برابر پیدا کنید که با $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۵}{۶}$ برابر باشند. سپس آنها را با هم جمع و نتیجه را با (الف) و (ب) مقایسه کنید.

$\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۶}=\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{۳۶}=\frac{۱۹}{۱۲}=۱\frac{۷}{۱۲}$

برای جمع $\frac{۵}{۶}+\frac{۳}{۴}$ ابتدا دو کسر مساوی با مخرج‌های برابر به‌دست آوردیم. هریک از اعداد ۱۲، ۲۴ و ۳۶ را یک مخرج مشترک دو کسر می‌نامیم.

$\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۶}=$ $\begin{cases}\frac{۹}{۱۲}+\frac{۱۰}{۱۲}\\ \frac{۱۸}{۲۴}+\frac{۲۰}{۲۴}\\ \frac{۲۷}{۳۶}+\frac{۳۰}{۳۶}\end{cases}$

عدد ۱۲ کوچک‌ترین مخرج مشترک دو کسر است و محاسبات را ساده‌تر می‌کند.

برای جمع یا تفریق دو کسر با مخرج‌های نابرابر بهتر است ابتدا کوچک‌ترین مخرج مشترک دو کسر را پیدا کنیم و سپس جمع یا تفریق را انجام دهیم.

فعالیت ها در حد متوسط طراحی شده اند. معلم می تواند با توجه به زمان و توانایی دانش آموزانش آنهارا غنی تر کند یا با ارائه توضیحاتی بیشتر و تغییراتی فعالیت را ساده تر نماید.

کار در کلاس

۱ــ ابتدا کوچک‌ترین مخرج مشترک دو کسر را مانند نمونه پیدا کنید و سپس جمع یا تفریق را انجام دهید.

$\frac{۵}{۱۸}+\frac{۱}{۱۲}$

با توجّه به فعّالیت قبل کافی است مضرب‌های ۱۸ و ۱۲ را به‌دست آوریم :

مضرب‌های ۱۸ : ۱۸, ۳۶, ۵۴, ...

مضرب‌های ۱۲ : ۱۲, ۲۴, ۳۶, ...

کوچک‌ترین مضرب مشترک ۳۶ است.

یعنی کوچک‌ترین مخرج مشترک ۱۸ و ۱۲ عدد ۳۶ است.

$\frac{۵}{۱۸}+\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱۰}{۳۶}+\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱۳}{۳۶}$

$\frac{۳}{۱۰}-\frac{۴}{۱۵}=\frac{\quad}{\quad}-\frac{\quad}{\quad}=$

$\frac{۷}{۲۴}+\frac{۵}{۱۶}=\frac{\quad}{\quad}+\frac{\quad}{\quad}=$

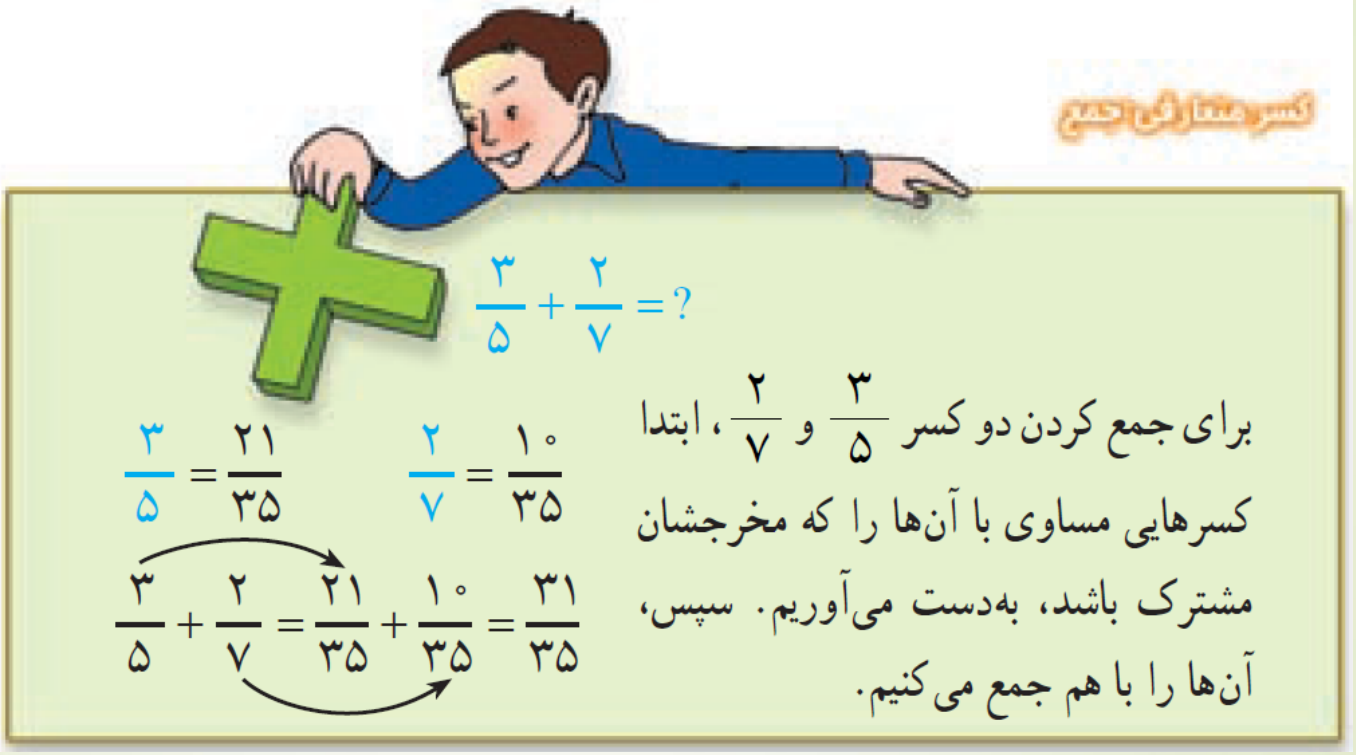
$\frac{۵}{۱۲}-\frac{۱}{۹}=\frac{\quad}{\quad}-\frac{\quad}{\quad}=$

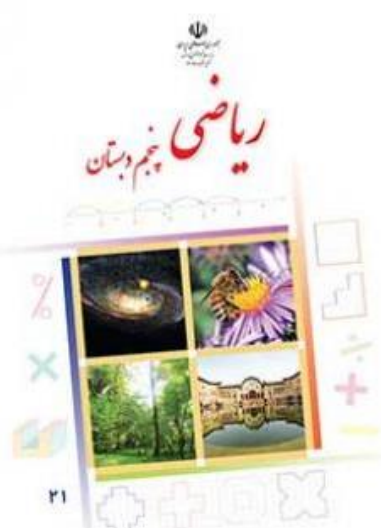
۲ــ حاصل جمع یا تفریق عددهای مخلوط را به‌دست آورید. اگر لازم است عدد مخلوط را به کسر تبدیل کنید :

$۲\frac{۱}{۱۲}-\frac{۳}{۱۶}=$

$۲\frac{۳}{۴}+۱\frac{۵}{۶}=$

جمع کسرها در پایه پنجم ابتدایی – کتاب قدیم(۱۳۹۰)





نمونه ای از یک تمرین در کتاب ریاضی پایه پنجم (۱۳۹۹)

۶ـ مریم $\frac{۳}{۴}$ از یک کتاب را خواند و نسرین $\frac{۱}{۲}$ از یک کتاب دیگر را خواند. آیا تعداد صفحاتی که نسرین خوانده است، می‌تواند بیشتر از صفحاتی باشد که مریم خوانده است؟ مثال بزنید.

ریاضیات ۳ سوم تجربی کتاب قدیم(۱۳۹۵)

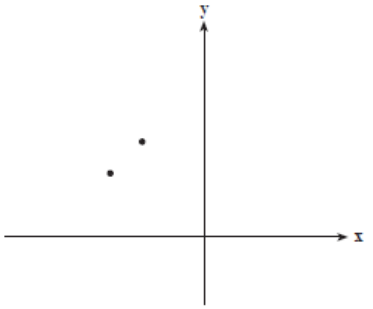
فصل سوم

حد و پیوستگی

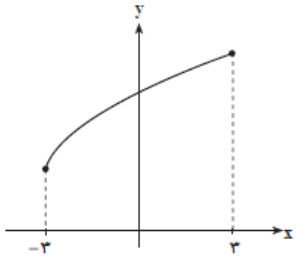
احمد یکی از دانش‌آموزان درس ریاضی ۳ است. احمد علاقه‌مند به رسم توابع و تشخیص چگونگی نمودار تابع است. یک روز او تصمیم گرفت نمودار تابع $y=f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ را در بازه $-3,3$. رسم کند. احمد با استفاده از ماشین‌حساب با محاسبات تقریبی جدول زیر را تشکیل داد

x	−۳	−۲/۵	−۲	−۱/۵	−۱	−۰/۵	۰	۰/۵	۱/۵	۲	۲/۵	۳
y	۲	۲/۷	۳	۳/۲۲	۳/۴۱	۳/۵۸	۳/۷۳	۳/۸۷	۴/۱۲	۴/۲۳	۴/۳۴	۴/۴۴

احمد به‌ازای $x=1$ مقدار تابع را حساب نکرد. چون تابع در این نقطه تعریف نشده است و این نقطه در دامنه تابع قرار ندارد. او نقاط به‌دست آمده از نمودار تابع را در صفحه مشخص کرد.



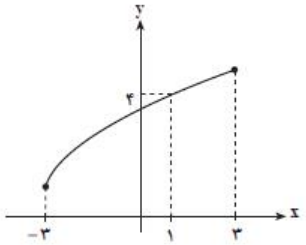
احمد نتیجه گرفت نمودار تابع باید به شکل زیر باشد.



یکی از دوستان احمد گفت این تابع در $x=1$ تعریف نشده است اما این نمودار مقداری برای این تابع در $x=1$ مشخص می‌کند. حتماً در این نتیجه‌گیری اشکالی وجود دارد. احمد برای اطمینان از درستی نتیجه‌گیری خود گفت بهتر است مقدارهای این تابع در اطراف نقطه $x=1$ را بیشتر بررسی کنیم. اگرچه تابع در $x=1$ تعریف نشده است ولی می‌توانیم برای مقدارهایی از x نزدیک ۱ مقدارهای تابع را حساب کنیم و ببینیم آیا مقدارهای به‌دست آمده همانند نمودار رسم شده عدد خاصی را نشان می‌دهند؟ این بار احمد جدولی ساخت که مقدارهای تابع را در نزدیکی‌های نقطه ۱ حساب کند.

x	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	$\to 1$.	۱/۰۰۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
y	۳/۹۴	۳/۹۷	۳/۹۹۷	۳/۹۹۹۷	۳/۹۹۹۹۷	$\to$? .	۴/۰۰۰۰۰۲	۴/۰۰۰۲	۴/۰۰۲	۴/۰۲	۴/۰۲

با محاسبه جدول بالا احمد نتیجه‌گیری کرد که با نزدیک شدن مقدارهای x به ۱ مقدارهای $f(x)$ به ۴ نزدیک می‌شوند. نمودار رسم شده برای تابع نیز چنین مطلبی را نشان می‌دهند.

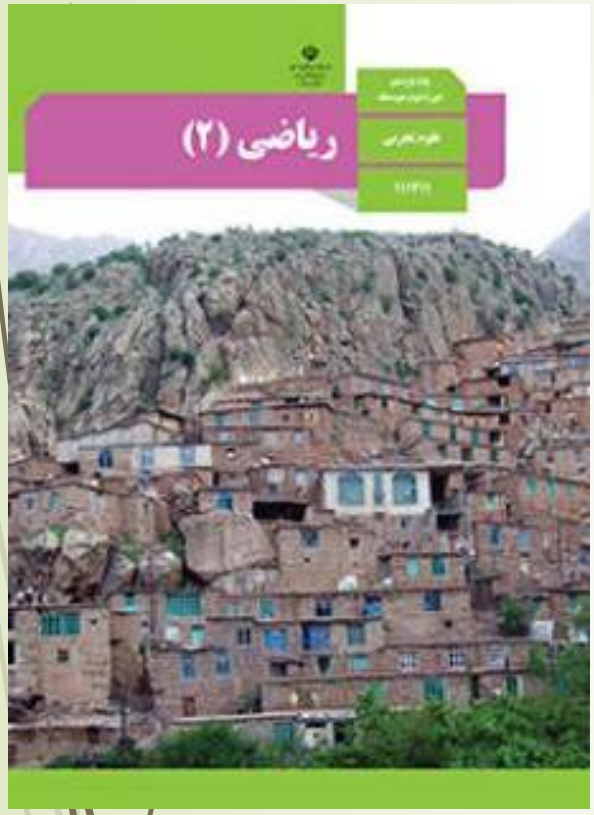


آنچه که احمد برای بررسی این تابع در اطراف نقطه ۱ انجام داد حدگیری نام دارد و می‌گویند حد تابع $y=\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ در نقطه ۱ برابر ۴ است.

موارد بسیاری پیش می‌آید که تابعی مانند $f(x)$ در نقطه‌ای مانند a تعریف نشده باشد ولی ما علاقه‌مند باشیم بدانیم که مقدارهای تابع برای مقدارهای x نزدیک a چگونه است. در این حالت باید بررسی کرد که با نزدیک شدن x به a آیا مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟

تمرین

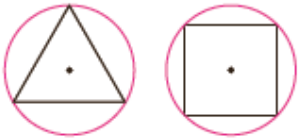
۱ـ تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با قانون $f(x)=x^2+3x+4$ مفروض است. مقدار $f(x)$ را برای هر x داده شده در جدول‌های صفحهٔ بعد محاسبه کنید (تا چهار رقم اعشار) و نتیجهٔ محاسبه را بنویسید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).



ریاضیات ۲ پایه یازدهم- رشته تجربی(۱۳۹۹)

فعالیت

در دایره‌های زیر به شعاع r یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک مربع به گونه‌ای رسم شده‌اند که رأس‌های آنها روی دایره واقع‌اند. چنین چند ضلعی‌هایی را محاطی می‌نامیم. واضح است که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع و مساحت مربع از مساحت دایره کمتر است.

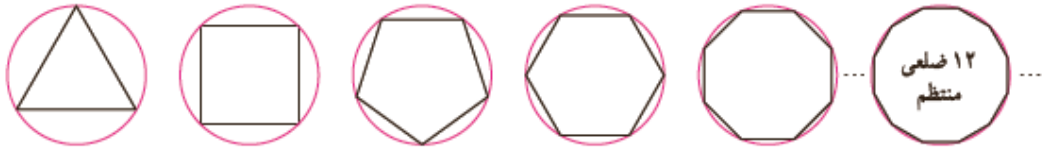


حدس می‌زنید مساحت کدام‌یک به مساحت دایره نزدیک‌تر است؟ هرچه تعداد اضلاع چند ضلعی‌های منتظم محاطی بیشتر شوند، چه اتفاقی می‌افتد؟

در جدول زیر مساحت تعدادی از n ضلعی‌های منتظم محاطی به شعاع r (با دقت یک رقم اعشار) داده شده است.

برای نزدیک‌تر شدن مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاطی به مساحت دایره چه می‌توان کرد؟ آیا به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم مساحت چند ضلعی‌های منتظم را به مساحت دایره نزدیک کنیم؟

زیاد شدن تعداد اضلاع	→	۱۲	...	۷	۶	۵	۴	۳	چند ضلعی منتظم محاطی
نزدیک‌تر شدن مساحت چند ضلعی‌ها به مساحت	→	$3r^2$	...	$2/8r^2$	$2/6r^2$	$2/38r^2$	$2r^2$	$1/3r^2$	مساحت تقریبی



مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاط در دایره را به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک‌تر کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع چند ضلعی را به مقدار کافی بزرگ اختیار کنیم. (به بیان دیگر با افزایش تعداد اضلاع، مساحت چند ضلعی‌ها به مساحت دایره نزدیک می‌شود).

ریشه شناختی در مقابل بنیان ریاضی

- به نظر تال (۱۹۹۰) به عوض سرو کارداشتن در ابتدا با تعاریف رسمی، که شامل عناصر نا آشنا برای یاد گیرنده است، بهتر است کوشش شود تا رویکردی پیدا شود که بر مبنای ان ایده هایی بنا شوند که دارای نقش دوگانه "آشنا بودن" برای دانش آموزان، و نیز فراهم ساختن "پایه ای" برای رشد ریاضی بعدی باشند. تال چنین ایده ای را ریشه شناختی می نامد.
- یک ریشه شناختی از یک بنیان ریاضی متفا وت است. در حالیکه یک بنیان ریاضی یک نقطه شروع مناسب برای توسعه منطقی یک موضوع است، یک ریشه شناختی، مناسبتر برای پیشرفت برنامه آموزشی است.

برخی از رویکردها و فرآیندهای نوین آموزشی در کتاب های درسی جدید ریاضی

- حل مسئله
- راهبرد های حل مسئله
- راه حل های چند گانه-حل مسئله به روش های مختلف
- طرح مسئله
- مسائل باز پاسخ
- بررسی بدفهمی ها
- استدلال
- گفتمان ریاضی
- اتصالات و ارتباطات ریاضی
- بازنمایی های ریاضی

به چه دلیل باید ریاضی یاد بگیریم؟

آرتور بنجامین: چرا ریاضی یاد می‌گیریم؟ اساسا، بخاطر سه دلیل: محاسبه، کاربرد، و آخرین و متاسفانه کمترین، از لحاظ زمانی که به آن اختصاص می‌دهیم، الهام بخش بودن آن است.

ما زمان زیادی را صرف یادگیری درباره محاسبه کردن می‌کنیم، اما بیایید کاربرد را فراموش نکنیم، از جمله، شاید، مهمترین کاربرد از همه آنها، **یاد بگیریم چطور فکر کنیم.**

برای مشاهده ویدئوی سخنرانی به آدرس زیر مراجعه کنید.

https://aparat.com/v/ybcjL

اهداف آموزش ریاضی (پولیا) :

هدف های خوب و محدود:

هدف خوب و محدود مدارس ابتدایی، تدریس مهارت های حسابی، یعنی جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و شاید کمی بیش تر از این ها، و هم چنین، تدریس کسرها، درصدها، نسبت ها، و شاید بیش تر از اینهاست. این هدف خوب و محدود مدارس ابتدایی است - یعنی انتقال این دانش -و هرگز نباید این را فراموش کنیم.

یک هدف متعالی تر: می خواهیم که تمام منابع کودک در حال رشد را پرورش دهیم، شما باید تمام شخصیت دانش آموز را پرورش دهید و تدریس ریاضی به خصوص، باید تفکر را پرورش دهد.

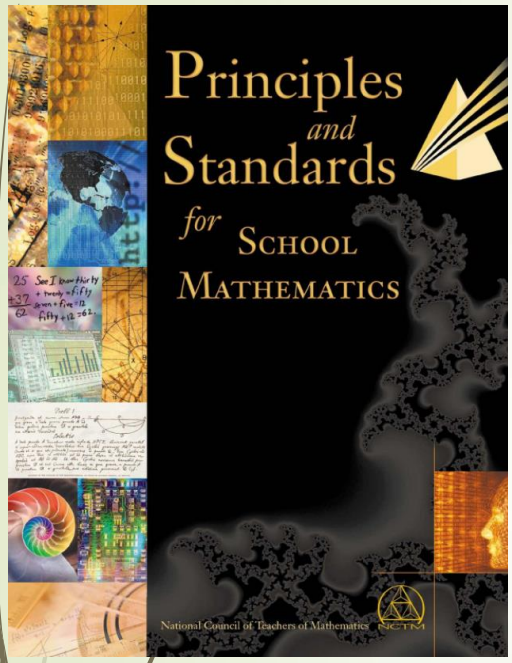
حل مسئله یکی از بهترین راه‌های پرورش تفکر ریاضی به حساب می‌آید.

مسئله چیست؟

موقعیت های مسئله آن هایی هستند که در آن ها افراد دسترسی به یک روش حل کم و بیش از قبل آماده شده را ندارند (شونفلد۱۹۹۲؛۱۹۸۵).

ما زمانی در حل مسئله در گیر می شویم که نیاز داریم بر موانع پاسخگویی به یک سوال غلبه کنیم. اگر بتوانیم فورا پاسخی از حافظه بازیابی کنیم، مسئله ای نخواهیم داشت. اگر نتوانیم پاسخی فوری از حافظه بازیابی کنیم، مسئله ای داریم که باید حل شود (استرنبرگ، ۲۰۰۵).

حل مسئله یعنی:



درگیر شدن در وظیفه، تکلیف و کاری که روش حل آن از پیش شناخته شده نیست. به این خاطر برای یافتن راه حل، دانش آموزان باید از دانش خودشان بهره گیرند و از مسیر این فرآیند آن ها اغلب درک و فهم های جدید ریاضی را رشد و توسعه خواهند داد(NCTM،۲۰۰۰).

به طور منطقی، در اوائل آموزش ریاضی باید روش مسئله حل کردن را به دانش آموزان یاد داد(شونفیلد).

توجه به فرایند حل مسئله در فعالیت های یاددهی– یادگیری

تعریف مسئله دارای یک ماهیت نسبی است. به این معنی که امکان دارد آنچه برای یک فرد مسئله به حساب می آید برای فرد دیگری تنها یک تمرین ساده به حساب آید و یا آنچه که در یک زمان برای فرد مسئله محسوب می شده است در زمانی دیگر تنها یک یادآوری به حساب آید.

ضمنا دشواری و چالش موجود در مسئله باید به تفکر و ذهن برگردد و نه اینکه تنها به یک مشکل محاسباتی مربوط شود. به هر حال باید توجه داشت که تمایل فرد به درگیر شدن و تفکر بر روی یک مشکل و دشواری نیز اهمیت دارد.

حل مسئله در برنامه درسی

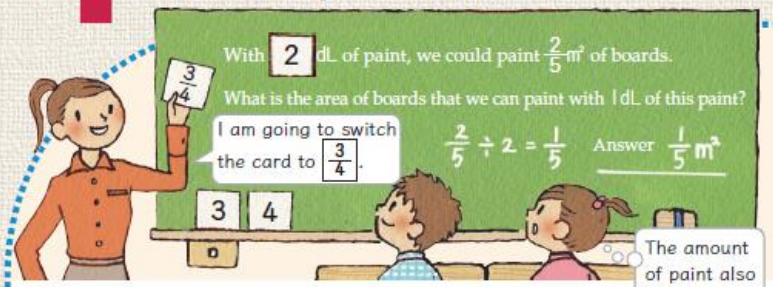
یکی از اختلافات اساسی بین فعالیت های کلاسی در آمریکا و استرالیا و ایران با ژاپن و سنگاپور در این است که در سه کشور اول وقتی از دانش آموزان خواسته می شود که بر روی مسائل به صورت فردی کار کنند قبلاً مثال مشابهی برای آنها در کلاس حل شده، اما در ژاپن و سنگاپور معلم روش حل مسئله را به دانش آموزان نشان نمی دهد.

اختلاف اساسی دیگری که ژاپن با کشورهای دیگر دارد در این است که بعد از حل مسئله توسط دانش آموزان، در ژاپن معلم بحث گسترده ای با دانش آموزان شروع می کند و در آن به مقایسه و پالایش نظرات دانش آموزان می پردازد و در اخر درس خلاصه ای از آن را ارائه می دهد در حالی که در سه کشور دیگر معلم وقت چندانی برای این فعالیت ها در نظر نمی گیرد.

ریحانی، ا؛ احمدی، غ؛ کرمی زرندی، ز.(۱۳۹۰). بررسی تطبیقی آموزش فرایند حل مسئله در برنامهٔ درسی آموزش ریاضی دوره متوسطه کشورهای آمریکا، استرالیا، ژاپن، سنگاپور و ایران. فصلنامه تعلیم و تربیت، سال بیست و هفتم، شماره۱(پیاپی ۱۰۵)، ص ۱۱۵-۱۴۱.

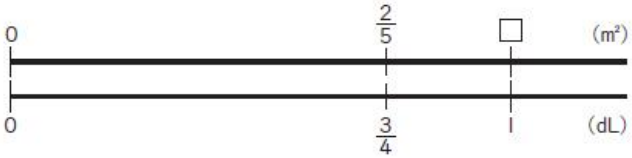
تقسیم کسرها: ریاضی پایه ششم کشور ژاپن

4 Division of Fractions
Let's Think about How to Divide by Fractions



1 Division of Fractions

1 With $\frac{3}{4}$ dL of paint, we could paint $\frac{2}{5}$ m² of boards. What is the area of boards that we can paint with 1 dL of this paint?



Let's think about what math sentence we should write.

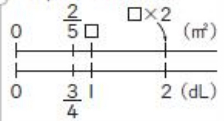
Math Sentence

Miho: If the amount of paint were 2dL, we could think of it as 2 of 1dL, so we divide $\frac{2}{5}$ m² into 2 equal parts. But...

Area painted	÷	Amount of paint used (dL)	=	Area we can paint with 1dL

Hiroki

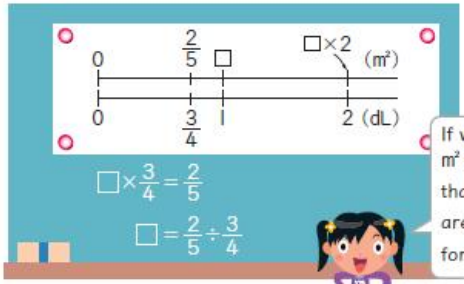
Yumi: $\frac{2}{5}$ m² is the area that you can paint with $\frac{3}{4}$ times as much of the area you can paint with 1dL, ...



1 Explain the reason for your math sentence.

Hiroki: If the amount of paint used were a whole number...

Area painted	÷	Amount of paint used (dL)	=	Area we can paint with 1dL
2dL ·····	$\frac{2}{5}$	÷ 2	=	$\frac{1}{5}$
3dL ·····	$\frac{2}{5}$	÷ 3	=	$\frac{2}{15}$
$\frac{3}{4}$dL ·····	$\frac{2}{5}$	÷ $\frac{3}{4}$	=	□



Yumi: If we say we can paint □ m² with 1dL, we can say that □×$\frac{3}{4}$=$\frac{2}{5}$. Since we are finding the number for □, it will be $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$.

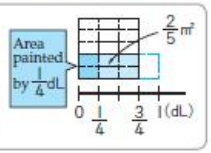
Summary

Even when the amount of paint used is a fraction, we can still use a division sentence to calculate the amount that can be painted with 1dL, just like we did with whole numbers and decimal numbers.

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$$

Let's think about how to calculate.

Kaori: First, find how much area can be painted with $\frac{1}{4}$dL, then...



Shinji: I wonder if we can change $\frac{3}{4}$ into a whole number, just like we did when using a decimal divisor.

Kid Characters

These six kids are going to learn together over six years.

حل مسئله به روش های مختلف

اطلاع از اینکه مسائل می توانند با راه های مختلف حل شوند در روشی که دانش آموزان با مسائل برخورد می کنند تاثیر خواهد گذاشت. دانش آموزی که فکر می کند تنها یک "راه درست" برای حل مسئله وجود دارد ممکن است که روی مسئله خاصی مدتی فکر کند و اگر توفیقی حاصل نکرد آن را رها کند و منتظر بماند تا در کلاس تکنیک حل به او ارائه شود و این الگویی است که بیشتر دانش آموزان ما در مدرسه بکار می گیرند.

پژوهش ها نشان می دهند که دانش آموزان هنگام روبرو شدن با یک مسئله – به ویژه وقتی که الگوریتمی مشخص برای حل آن فرا نگرفته باشند – به روش های متفاوتی عمل می کنند.

هر کدام از شکل‌های زیر از تعدادی دایره درست شده است. اگر شکل‌ها را به همین ترتیب ادامه دهیم، تعداد دایره‌های شکل هفتم چقدر است؟

چهار دانش‌آموز این مسئله را حل کرده و تعداد دایره‌های شکل هفتم را به‌دست آورده‌اند. راه‌حل‌های آنها را بررسی کنید و توضیح دهید. کار آنها را کامل کنید.

۱) راه حلّ مهدی :

۲) راه حلّ امید :

= ۸ + ۷ = تعداد دایره‌های شکل هفتم

۳) راه حلّ سعید :

= ۱ + (۷×۲) = تعداد دایره‌های شکل هفتم

۴) راه حلّ نوید :

= ۱− (۲ × ۸) = تعداد دایره‌های شکل هفتم

آیا شما می‌توانید روش دیگری پیدا کنید؟

آیا امکان دارد که تعداد دایره‌ها در یکی از شکل‌ها ۱۲ تا شود؟ چرا؟

آیا می‌توانید تعداد دایره‌های شکل چهلم را به‌دست آورید؟

روش های مختلف برای یک مسئله ریاضی پایه چهارم(۱۳۹۹)

۴) راه حل نوید :

= ۱– (۸ × ۲) = تعداد دایره‌های شکل هفتم

۱–(۲×۴)

۱– (۲×۳)

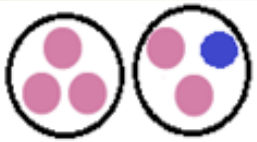
۱ – (۲×۲)

آیا شما می‌توانید روش دیگری پیدا کنید؟

آیا امکان دارد که تعداد دایره‌ها در یکی از شکل‌ها ۱۲ تا شود؟ چرا؟

آیا می‌توانید تعداد دایره‌های شکل چهلم را به‌دست آورید؟

1 × 3



2 × 3 - 1

(3×3)-2

(4×3)-3

روش یک دانش آموز ابتدایی با الهام از روش کتاب

روش های مختلف برای یک مسئله ریاضی پایه هشتم(۱۳۹۹)

معادله

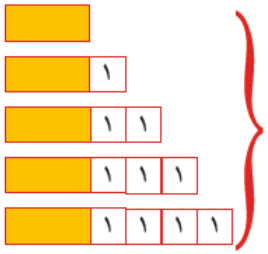
فعّالیت

۱ــ حاصل جمع پنج عدد متوالی طبیعی ۶۵ شده است. عدد وسط چه عددی است؟
پنج دانش‌آموز این مسئله را با راهبردهای مختلف حل کرده‌اند. راه حل هر کدام را کامل کنید و توضیح دهید.

راه حل سمیه : راهبرد حدس و آزمایش

حاصل‌جمع	عدد پنجم	عدد چهارم	عدد سوم	عدد دوم	عدد اول
۳۵	۹	۸	۷	۶	۵
۴۵	۱۱	۱۰	۹	۸	۷
۶۵	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱

راه‌حل فریده : راهبرد رسم شکل



۶۵→۵ ▭ +۱۰ =۶۵

راه حل فهیمه : راهبرد روش‌های نمادین

○+ (○ +۱) +(○ +۲) + (○+۳) + (○+۴) =۶۵

عدد وسطی را در تساوی بالا مشخص کنید. ۵ ○+۱۰=۶۵

راه‌حل مهدیه : راهبرد تشکیل معادله

x+(x+۱)+(x+۲)+(x+۳)+(x+۴) =۶۵

۵x+۱۰=۶۵

راه‌حل فرشته : راهبرد تشکیل معادله

(x−۲) + (x−۱) + x + (x+۱) + (x+۲) = ۶۵

تفاوت راه‌حل‌های فرشته و مهدیه را توضیح دهید.

۲ــ مهدیه با توجه به آنچه سال گذشته آموخته بود، معادلهٔ خود را به‌صورت زیر حل کرد :

۵x+۱۰=۶۵

−۱۰ ↓

۵x+۱۰−۱۰=۶۵−۱۰

۵x=۵۵

× $\frac{۱}{۵}$ ↓

$\frac{۱}{۵}$×۵x=$\frac{۱}{۵}$×۵۵

x=۱۱

معلم راه حل مهدیه را به‌صورت زیر خلاصه کرد. توضیح دهید در این روش معنی پیکان‌ها چیست؟

۵x+۱۰=۶۵

۵x=۶۵−۱۰

۵x=۵۵→x=$\frac{۵۵}{۵}$=۱۱

۳ــ با توجه به سؤال بالا، روش حل معادله را توضیح دهید؛ سپس معادله‌های دیگر را به همین ترتیب حل کنید.

۲x−۳=x+۵ ۳x−۱=x−۷ ۲(x−۱)=۳(x+۴)

۲x−x=۵+۳

x=۸

روش های مختلف برای یک مسئله ریاضی گسسته پایه دوازدهم (۱۳۹۹)

مثال : اگر b و a دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید : $a^۲+ab+b^۲\geq ۰$

حل : $a^۲+ab+b^۲\geq ۰\Leftrightarrow (a+\frac{b}{۲})^۲+\frac{۳b^۲}{۴}\geq ۰$

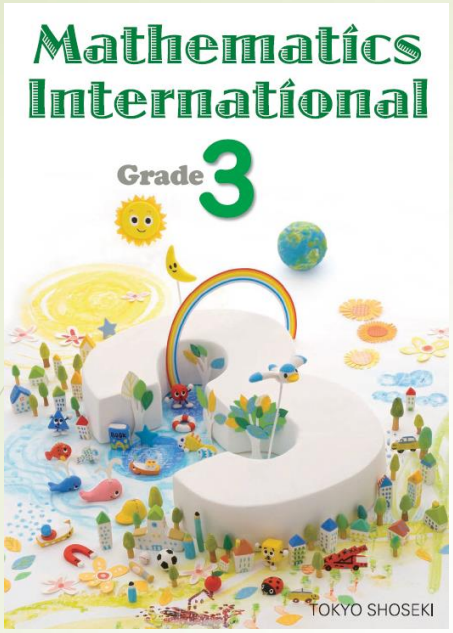
اثبات کوتاه و زیبایی است. حکم با یک گزاره همیشه درست (سمت راست) هم‌ارز است.

راه دوم :

$$a^۲+ab+b^۲\geq ۰\Leftrightarrow ۲a^۲+۲ab+۲b^۲\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow a^۲+b^۲+۲ab+a^۲+b^۲\geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^۲+a^۲+b^۲\geq ۰ \text{ . گزاره همیشه درست}$$

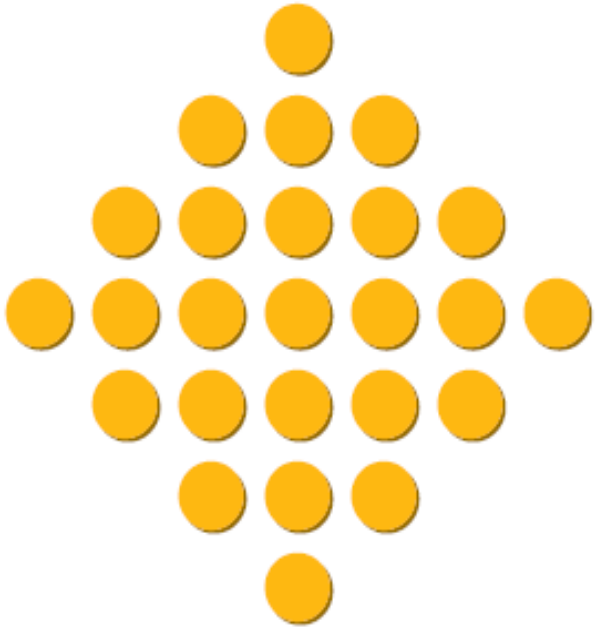
البته ممکن است شما هم راه‌حل دیگری برای این مسئله ارائه کنید.

شیوه‌ای که در این قسمت از درس مورد استفاده قرار گرفت را برای نشان دادن نادرستی یک گزاره نیز می‌توان به‌کار برد.



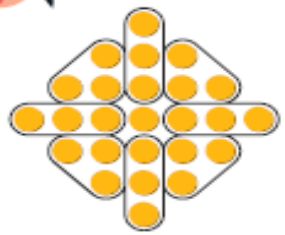
روش های مختلف برای یک مسئله
ریاضی پایه سوم ابتدایی(ژاپن، ۲۰۱۲)

How many ● are there? Write how to calculate the total number in one math sentence, and then find the answer.



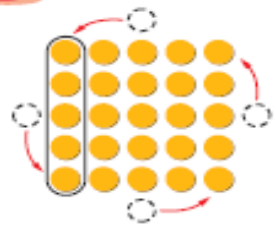
روش های مختلف برای یک مسئله ریاضی پایه سوم ابتدایی(ژاپن، ۲۰۱۲)

Yumi



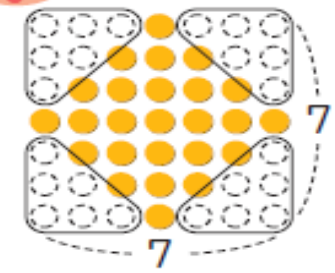
I saw 8 groups of 3 and 1 more.

Takumi



I moved some ● to make a square.

Shinji



$7 \times 7 - 6 \times 4$

Miho

$4 \times 4 + 3 \times 3$

1. Write one math sentence for Yumi's method and one for Takumi's method.

2. Explain Shinji's idea.

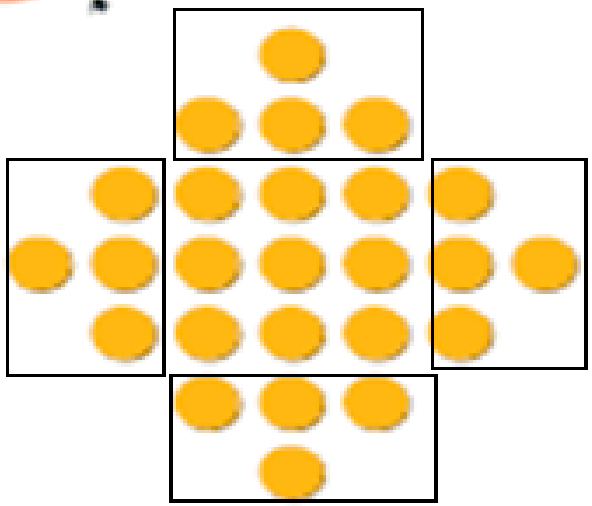
What does 6×4 in Shinji's idea represent?

3. Look at the math sentence Miho wrote. Explain her idea using diagrams and words.

Try to draw on Miho's picture above. There is more than one way to group the dots to match Miho's math sentence.

روش های مختلف برای یک مسئله ریاضی پایه سوم ابتدایی(ژاپن، ۲۰۱۲)

Miho

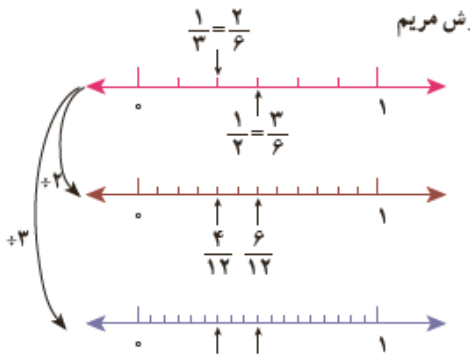


$4 \times 4 + 3 \times 3$

روش های مختلف برای یک مسئله ریاضی پایه نهم(۱۳۹۹)

۲ــ می‌خواهیم بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ چند کسر بنویسیم. روش‌های مختلفی را که چهار دانش‌آموز نوشته‌اند، بررسی و کامل کنید؛ راه حل هر کدام را توضیح دهید.

روش مریم



روش بهار

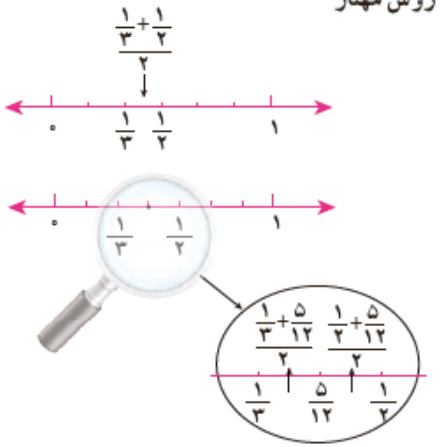
$$\frac{۱}{۳} < ? < \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۲}{۶} < ? < \frac{۳}{۶}$$

$$\frac{۴}{۱۲} < \frac{۵}{۱۲} < \frac{۶}{۱۲}$$

$$\frac{۶}{۱۸} < \frac{۷}{۱۸} \quad , \quad \frac{۸}{۱۸} < \frac{۹}{۱۸}$$

روش مهناز



روش عطیه

$$\frac{۱}{۳} < ? < \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱}{۳} < \frac{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}}{۲} < \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱}{۳} < \frac{۵}{۱۲} < \frac{۱}{۲}$$

الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان بی‌شمار، کسر پیدا کرد.

ب) آیا مجموعهٔ عددهای گویا را می‌توان با نوشتن عضوها نشان داد؟ چرا؟

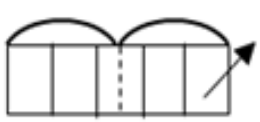
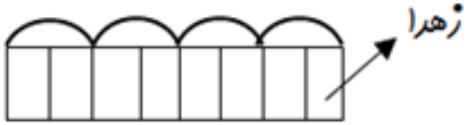
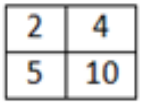
ج) آیا می‌توان مجموعهٔ عددهای گویا را با محور اعداد نمایش داد؟

د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید.

$$\left\{ \frac{a}{b} \middle| \right\}$$

بررسی درک و فهم دانش آموزان پایه ششم ابتدایی از کسرها(دوستی، ۱۳۹۲)

مریم و زهرا نوشیدنی پرتقالی را برای مهمانی آماده می‌کنند. روشی را که آن‌ها به‌کار بردند در زیر نوشته شده است. شربت مریم شیرین‌تر است یا زهرا؟ پاسخ خود را توضیح دهید.
روش مریم: ترکیب دو فنجان شربت پرتقال با پنج فنجان آب
روش زهرا: ترکیب چهار فنجان شربت پرتقال با هشت فنجان آب

انواع پاسخ‌ها		نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان
درست	1	زهرا چون $\frac{۲\times۸}{۵\times۸} \bigcirc \frac{۴\times۵}{۸\times۵} \longrightarrow \frac{۱۶}{۴۰} < \frac{۲۰}{۴۰}$
	2	زهرا چون زهرا آب کمتری ریخته. $\frac{۵}{۲}=۲\frac{۱}{۲} > \frac{۴}{۲}=۲$
	3	زهرا، چون مریم  زهرا 
	4	زهرا 8 فنجان آب ریخته پس شیرین‌تر است. 
	5	زهرا، چون برای هر دو فنجان آب یک فنجان شربت پرتقال می‌ریزه ولی مریم برای هر دو فنجان و نیم آب یک فنجان شربت پرتقال میریزه.
نادرست	1	روش مریم، چون شربت پرتقال 2/5 برابر آب است اما برای زهرا 2 برابر آب است. $۵\div۲=۲/۵$ و $۸\div۴=۲$
	2	مریم، چون مقدار آب کمتری ریخته.
	3	شربت زهرا، زیرا شربت پرتقال زیادی ریخته است.
	4	زهرا چون $۴ \succ ۳$ $5-2=3$ $8-4=4$

آموزش راهبردهای حل مسئله

در مورد ضرورت آموزش راهبردهای حل مسئله در بین پژوهشگران و آموزشگران تقریبا اتفاق نظر وجود دارد. با این حال در مورد چگونگی این کار نظرات متفاوتی هست. در کتاب های جدید آموزش راهبردها از متن درس جدا نشده است. ضمنا اصراری برذکر عناوین راهبردها جز موارد مشخص و آشنا نبوده است. بنابراین سعی شده است که از عبارات و واژه های نامانوس اجتناب شود. با آنکه بخش جدا گانه ای با عنوان حل مسئله درکتاب وجود ندارد، ولی دراکثر فعالیت ها دانش آموزان به نوعی درگیر فرآیند حل مسئله می شوند. علاوه براین اساسا آموزش راهبردها ممکن است به زمانهای بسیار طولانی نیاز داشته باشد. زیرا هر راهبرد خود ممکن است شامل ده ها راهبرد جزئی تر باشد.

برخی از راهبرد های حل مسئله

Common Core – Grades K-12 *(Mathematical Practice 1)*
Mathematically proficient students start by explaining to themselves the meaning of a problem and looking for entry points to its solution.

Step 1 Understand the Problem

- Do you understand all the words?
- Can you restate the problem in your own words?
- Do you know what is given?
- Do you know what the goal is?
- Is there enough information?
- Is there extraneous information?
- Is this problem similar to another problem you have solved?

Common Core – Grades K-12 *(Mathematical Practice 1)*
Mathematically proficient students analyze givens, constraints, relationships, and goals. They make conjectures about the form and meaning of the solution and plan a solution pathway rather than simply jumping into a solution attempt.

Step 2 Devise a Plan

Can one of the following strategies (heuristics) be used? (A **strategy** is defined as an artful means to an end.)

1. Guess and test.
2. Draw a picture.
3. Use a variable.
4. Look for a pattern.
5. Make a list.
6. Solve a simpler problem.
7. Draw a diagram.
8. Use direct reasoning.
9. Use indirect reasoning.
10. Use properties of numbers.
11. Solve an equivalent problem.
12. Work backward.
13. Use cases.
14. Solve an equation.

برخی از راهبرد های حل مسئله

15. Look for a formula.
16. Do a simulation.
17. Use a model.
18. Use dimensional analysis.
19. Identify subgoals.
20. Use coordinates.
21. Use symmetry.

The first six strategies are discussed in this chapter; the others are introduced in subsequent chapters.

Common Core – Grades K-12 *(Mathematical Practice 1)*
Mathematically proficient students consider analogous problems and try special cases and simpler forms of the original problem in order to gain insight into its solution.

Step 3 Carry Out the Plan

- Implement the strategy or strategies that you have chosen until the problem is solved or until a new course of action is suggested.
- Give yourself a reasonable amount of time in which to solve the problem. If you are not successful, seek hints from others or put the problem aside for a while. (You may have a flash of insight when you least expect it!)
- Do not be afraid of starting over. Often, a fresh start and a new strategy will lead to success.

Common Core – Grades K-12 *(Mathematical Practice 1)*
Mathematically proficient students monitor and evaluate their progress and change course if necessary.

Step 4 Look Back

- Is your solution correct? Does your answer satisfy the statement of the problem?
- Can you see an easier solution?
- Can you see how you can extend your solution to a more general case?

آموزش راهبرد های حل مسئله

توصیف های پولیا در مورد حل مسئله ، برای کسانی که با آن استراتژی ها آشنایی ندارند و چگونگی پیاده کردن آنها را نمی دانند، جزییاتی کافی عرضه نمی کرد.

وقتی شما یک استراتژی را به دقت در نظر بگیرید، خواهید دید که خود این استراتژی از چندین فن حل مسئله مربوط به هم، اما اساسا متفاوت، ترکیب شده است.

آموزش راهبرد های حل مسئله

بیست واندی استراتژی نیرومند عنوان شده درچگونه حل کنیم، در حقیقت از دویست سیصد استراتژی ضعیف تر اما عملا مفید تشکیل یافته است. این استراتژی ها را می توان یاد داد اما زیادبودن تعداد آن ها خود مشکل تازه ای می آفریند. شما باید بدانید ازاین سیصد تکنیکی که بالقوه در اختیار دارید، کدام یک را در چه مواقعی می توان به کار بست. اگر ندانید که چگونه از روشها استفاده کنید، دانستن روش درست کمک چندانی نخواهد کرد .

«بهره برداری از مسئله های مشابه ساده تر» حقیقتا یک استراتژی نیست بلکه مجموعه ای از استراتژی های مشابه است. برای حل مسئله ای با این استراتژی باید:

- **به فکر استفاده از ان بیفتیم(و این ساده نیست)**
- **بتوانیم مسئله های مشابهی طرح کنیم که مناسب به نظر می رسند.**
- **از میان مسئله های مشابه، مسئله مناسب را برگزینیم.**
- **این مسئله را حل کنیم.**
- **بتوانیم خواه از روش حل یا از نتیجه مسئله مشابه، به نحو مناسبی بهره برداری کنیم.**

آموزش دانشجویان برای به کار بردن حتی یک استراتژی، مستلزم صرف وقت زیادی است. باید از میان استراتژی ها یک استراتژی مناسب انتخاب کنیم.

راهبرد رسم شکل- تجربه سنگاپور

در سال ۱۹۸۳ وزارت آموزش سنگاپور به طور رسمی در برنامه درسی ریاضی ابتدایی راهیابی شامل رسم نمودار را مطرح کرد. این راهیاب به عنوان ابزاری برای حل مسائل حسابی، همچنین مسائل جبری، مسائل کلامی شامل اعداد صحیح، کسر، نسبت و درصد در نظر گرفته شده بود (کاو، ۱۹۸۷).

اعتقاد بر این بوده که اگر دانش آموزان با ابزاری برای تجسم یک مسئله کلامی مجهز شوند- که آن را تبدیل به یک مسئله ساده کلامی حسابی یا جبری می کند- ساختاری که شالوده مسئله را پی ریزی نموده است آشکارمی شود. هنگامی که کودکان ساختار مسئله را درک کنند احتمال بیشتری وجود دارد که آن را حل کنند (کاو،۱۹۸۷).

رسم شکل-

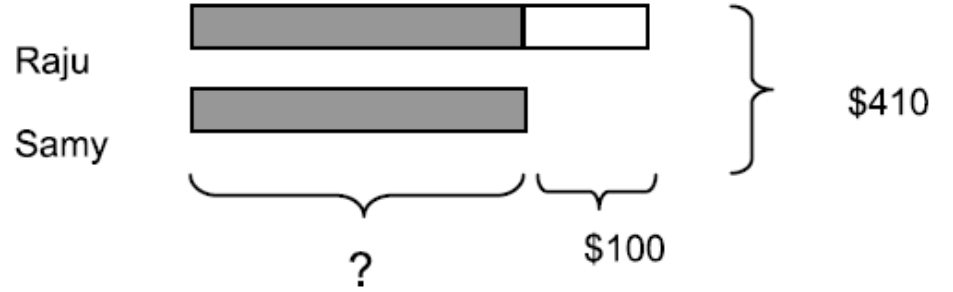
۱- هر دانش آموزان کمک می کند تا موقعیت را تجسم کنند.

۲- این مدل تصویری ملموس از یک موقعیت مجرد فراهم می کند.

۳- یادگیری دانش آموزان را از طریق دیدن و انجام دادن ارضا می کند.

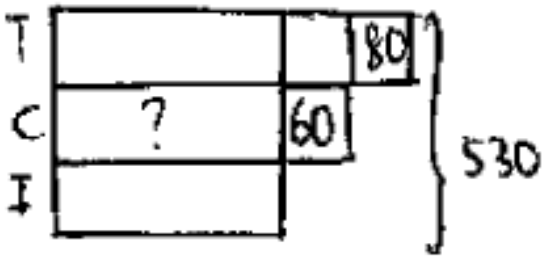
۴- کلمات را به تصاویر قابل تشخیص برای ذهن های نورس تبدیل می کند.

- حل معادله تصویری: راجو و سامی ۴۱۰ دلار را بین خود تقسیم کردند. به راجو ۱۰۰ دلار بیشتر از سامی رسید. به سامی چقدر رسید؟(کای و همکاران، ۲۰۱۱).



از ۱۵۱ دانش آموز سنگاپوری پایه ۵ خواسته شده بود که مسئله "وسائل" را حل کنند، که نزدیک به نیمی از آن ها به طور صحیح رویکرد معادله تصویری را برای حل مسئله به کار بردند(کای و همکاران، ۲۰۱۱).

- در یک حراجی خانم تان ۵۳۰ دلار برای یک میز، صندلی و اتو پرداخت. قیمت صندلی ۶۰ دلار بیشتر از قیمت اتو بود. قیمت میز ۸۰ دلار بیشتر از قیمت صندلی بود. قیمت صندلی چقدر بود؟



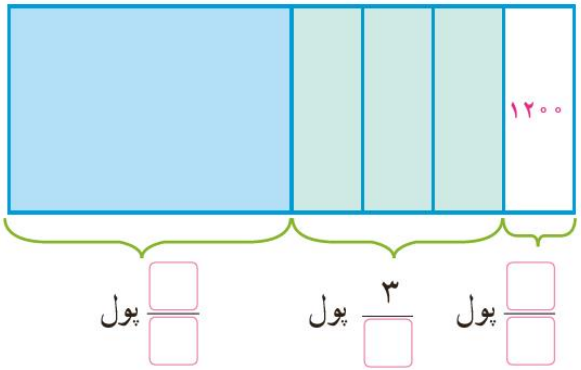
80 + 60 = 140
140 + 60 = 200
530 − 200 = 330
330 ÷ 3 = 110
110 + 60 = 170

راهبرد رسم شکل- ریاضی پایه ششم(۱۳۹۹)

فعّالیت

راحله با نصف پول خود یک کتاب خرید و با $\frac{۳}{۴}$ باقیمانده‌ی پولش یک دفتر خرید. اگر پس از خرید کتاب و دفتر ۱۲۰۰ تومان برای راحله باقی مانده باشد، پول راحله چقدر بوده است؟ راه‌حل را کامل کنید و آن را توضیح دهید.

با توجّه به شکل کافی است که حاصل‌ضرب ۱۲۰۰ × ☐ را پیدا کنیم.

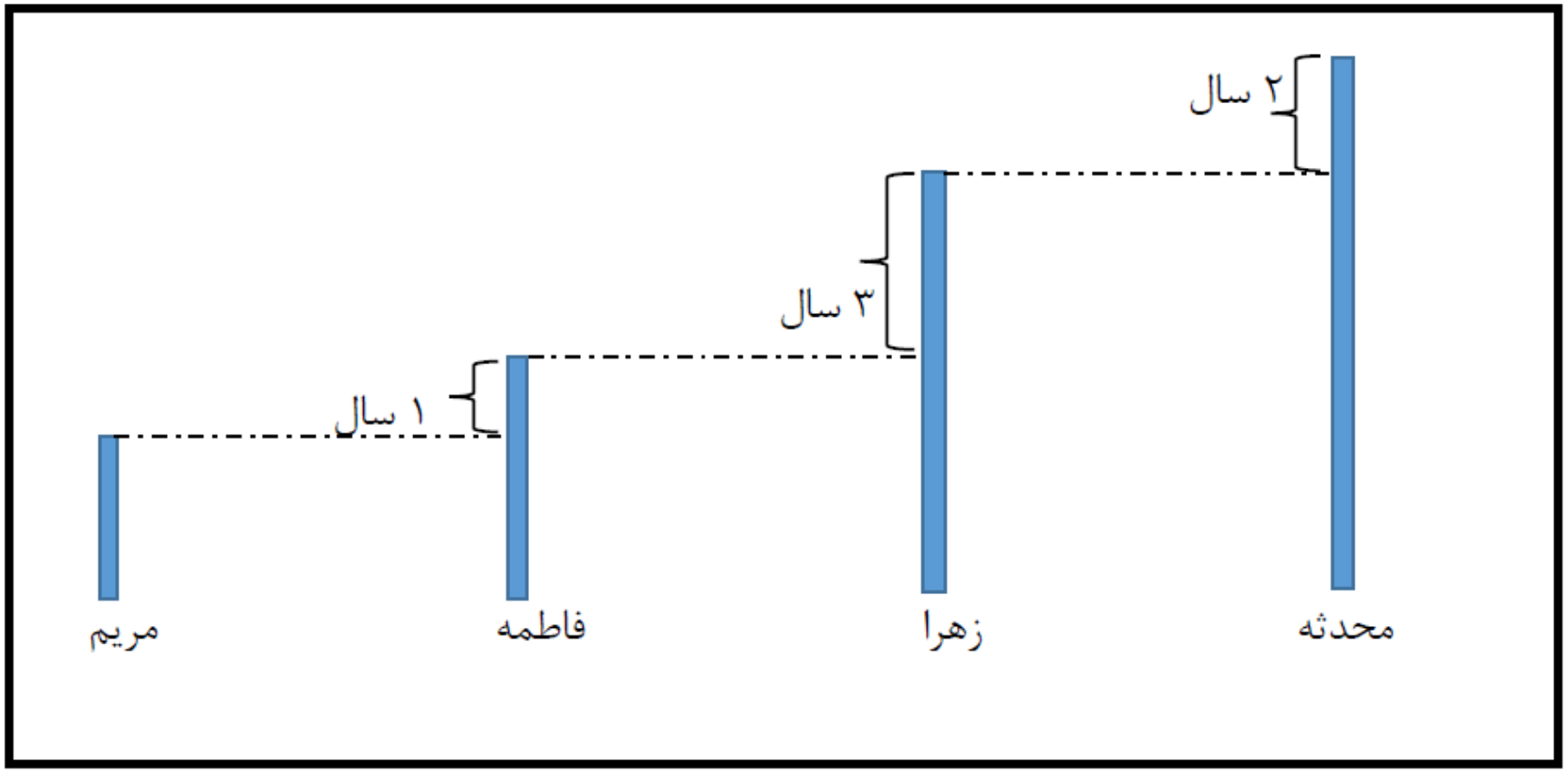


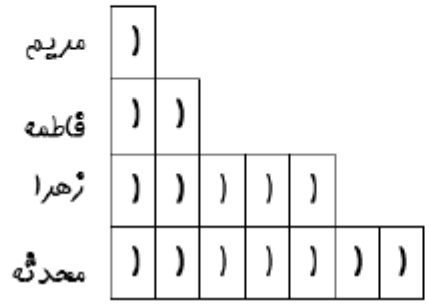
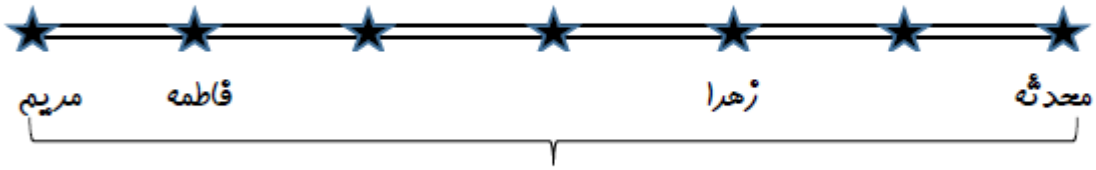
آیا روش دیگری برای حلّ مسئله‌ی بالا می‌دانید؟

زهرا ۳ سال از فاطمه بزرگتر و ۲ سال از محدثه کوچکتر است. مریم ۱ سال از فاطمه کوچکتر است. محدثه چند سال از مریم بزرگ تراست؟

ریحانی، ا.؛ یافتیان، ن. و رضایی، ا. (۱۳۹۹). بررسی تأثیر آموزش حل مسئله با تأکید بر راهبرد رسم شکل به معلمان پایه‌ی هفتم بر عملکرد حل مسئله‌ی کلامی دانش‌آموزان آن‌ها. دو فصلنامه رویکردهای نوین آموزشی

زهرا ۳ سال از فاطمه بزرگتر و ۲ سال از محدثه کوچکتر است. مریم ۱ سال از فاطمه کوچکتر است. محدثه چند سال از مریم بزرگتر است؟



راهبرد	راه‌حل دانش‌آموزان
رسم شکل همراه با مثال عددی (مریم یک ساله فرض شده است).	
رسم شکل	 ۶ سال اختلاف سن دارند.

کمک به کودکان در یادگیری ریاضیات

- دانش آموزان باید با مسائلی روبرو شوند که راه حل آن ها روشن نیست، آن ها باید به آزمودن بسیاری از راه های مختلف حل مسئله تشویق شوند.
- لازم است مسئله ها در حدی مشکل باشند که برای دانش آموزان چالش ایجاد کنند، اما سختی مسئله ها نباید به اندازه ای باشند که آن ها را تبدیل به یک معمای غیر قابل حل کند.
- کودکان تصور می کنند که مسائل باید به سهولت حل شوند.
- تدریس موثر حل مسئله به زمان احتیاج دارد.

معیارهای یک مسئله (تکلیف) ریاضی خوب

پژوهش‌ها (به طور مثال لستر و کای، ۲۰۱۶؛ مکینتاش، ۲۰۰۰؛ شونفلد، ۲۰۰۵) مشخص می‌کنند که مسئله "خوب"، مسئله‌ای است که:

- **دارای ریاضیات مهم و مفیدی است که در آن گنجانده شده است.**
- **دانش‌آموزان می‌توانند با استفاده از راهبردهای حل مختلف به این مسئله بپردازند.**
- **راه‌حل‌های مختلفی دارد یا این اجازه را می‌دهد که تصمیمات یا مواضع مختلفی اتخاذ شده و مورد دفاع قرار گیرند.**
- **نباید همیشه یک پاسخ معین و مشخصی داشته باشد، بلکه بر مسائل بازپاسخ نیز تأکید داشته باشد که موجب تقویت، نوآوری و قوه‌ی ابتکار فراگیران شود و آن‌ها را به جستجوی بیشتر در عرصه‌ی آموزه‌های ریاضی وا دارد.**
- **دانش‌آموز را به مشارکت و گفتگو ترغیب می‌کند.**
- **نیاز به تفکر و حل مسئله سطح بالاتر را پیش می‌کشد.**
- **غیر معمولی باشد.**

معیارهای یک مسئله (تکلیف) ریاضی خوب

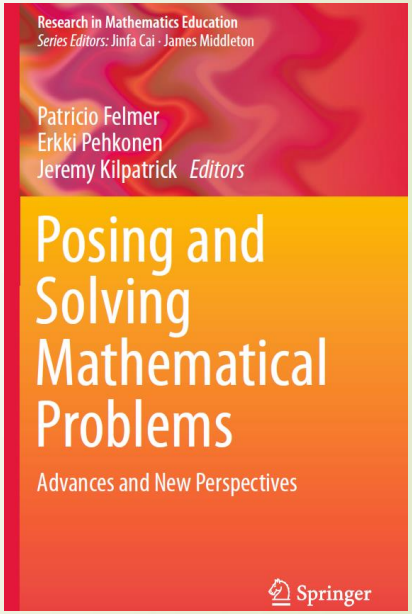
- در توسعه درک مفهومی دانش‌آموزان نقش‌آفرینی دارد.
- به دیگر ایده‌های ریاضی مهم ارتباط می‌یابد.
- استفاده ماهرانه از ریاضیات را ترغیب می‌کند.
- فرصتی را برای تمرین مهارت‌های مهم در اختیار قرار می‌دهد.
- فرصتی را برای ارزیابی دانش‌آموزان توسط معلم و یافتن نقاط ضعف آن‌ها ایجاد می‌کند.
- به سادگی با استفاده از یک رویه‌ی از پیش آموخته شده، قابل حل نیست.
- چالش برانگیز و در عین حال قابل دست یابی توسط دانش‌آموزان است.
- نیازمند پافشاری است.
- تکراری و خسته کننده نباشد و توانایی ابتکار شاگردان را در فعالیت‌های حل مسئله افزایش دهد.

معیارهای یک مسئله (تکلیف) ریاضی خوب

- به خوبی طرح شده است.
- داده ها (مفروضات) و خواسته‌های مسئله شفاف و روان باشد و با واژه‌ها و نمادهای قابل فهم برای فراگیران طراحی گردد.
- متناسب با موارد تدریس شده و آمادگی ریاضی و ظرفیت‌های ذهنی فراگیران و مرتبط با تجربه‌های آن‌ها باشد.
- برمفاهیم و مهارت‌های ریاضی به طور متعادل تأکید کند و تنها بر فرمول-ها و قاعده‌های ریاضی متکی نباشد.
- به گونه‌ای غیر مستقیم آمادگی‌های ذهنی و مفهومی و مهارتی را برای تدریس مباحث بعدی در فراگیر ایجاد کند.
- فراگیر از درگیرشدن با مسئله و چالش با آن‌ها احساس رضایت و لذت کند و با انگیزش و رغبت راه حل را دنبال کند.

آیا حل مسئله ریاضی را می توان آموزش داد؟
پاسخ های مقدماتی از ۳۰ سال تحقیق

Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research



Frank K. Lester Jr. and Jinfa Cai
© Springer International Publishing Switzerland 2016 **117**
P. Felmer et al. (eds.),
Posing and Solving Mathematical Problems,

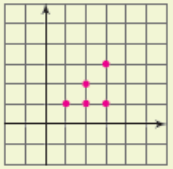
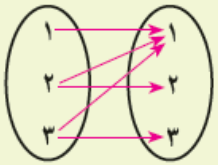
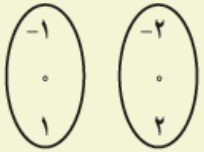
Teachers should engage students in a variety of problem-solving activities:
(1) finding multiple solution strategies for a given problem,
(2) engaging in problem posing and mathematical exploration ,
(3) giving reasons for their solutions, and
(4) making generalizations.
.

بازنمایی های ریاضی

درک یک مفهوم در یک بازنمایی آن لزوما به این معنی نیست که فرد آن را در هر بازنمایی دیگر نیز درک می کند. فراگیران نیاز دارند که مفاهیم را در بازنمایی های مختلف آن درک کنند و قادر باشند که آن ها را به یکدیگر تبدیل کنند و بین آن ها ارتباط برقرار کنند. بازنمایی های مختلف بصیرت های متفاوتی را بدست می دهند که امکان یک درک بهتر، عمیق تر نیرومند تر و کامل تر از مفهوم را بدست می دهد.

وقتی فرد با بازنمایی های متفاوت یک مفهوم ریاضی سر و کار دارد، ممکن است مفهوم را با به چنگ آوردن خواص مشترک آن و نادیده گرفتن مشخصه های نامربوطی که بر آن بازنمایی بخصوص در دسترس تحمیل شده اند انتزاع کند.

۲ در هر سطر جدول زیر نمایش‌های مختلف یک رابطه داده شده است. جاهای خالی جدول را کامل و معلوم کنید که آیا این رابطه یک تابع است؟ ردیف آخر را به دلخواه خودتان کامل کنید.

جدول یا نمودار	نمودار پیکانی	مجموعه زوج‌های مرتب	توصیف رابطه
		$\{(2,2),(2,1),(1,1),(3,3),(3,1)\}$	به هر عدد طبیعی کمتر از ۴ مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد.
		$\{(2,4),(3,9),(4,16)\}$	
			به اعداد ۴ و ۷ ریشه‌های دوم آنها را نسبت می‌دهد.
			

گفتمان ریاضی

منظور از گفتمان ریاضی، سخن گفتن، نوشتن، بحث کردن، سوال کردن، توضیح دادن، توجیه کردن و استدلال کردن در مورد ایده ها و مفاهیم ریاضی است. گفتگوی دانش آموزان با معلم و گفتگوی آنها با یکدیگر چه انفرادی و چه به صورت گروهی و توضیح دادن در مورد تفکرات و نیز دفاع از ایده ها و نیز قضاوت و ارزیابی در مورد ایده های ریاضی دیگر دانش آموزان و نیز نقد و بررسی راه حل های یک مسئله در کلاس درس بخش های مهمی از فرآیند گفتمان ریاضی به شمار می روند.

گفتگو با دانش آموزان – سوال های فراشناختی

- دقیقا چه کاری در حین حل مسئله انجام می دهید؟
- چرا آن کار را انجام می دهید؟
- چگونه این کار به شما کمک می کند؟

- در بررسی موضعی می توان به اشتباهاتی که در اثر بی توجهی رخ داده است پی برد. در بررسی کلی با مروری بر حل مسئله ممکن است روش های دیگری بدست آید.

کنترل: *دانش آموزان باید روی فرآیند حل مسئاله ریاضی کنترل و بازبینی و بازتاب فکورانه داشته باشند.*

مسئله حل کن های کارا و واقعی بطور مداوم آنچه را که انجام می دهند بازبینی و کنترل می کنند و اصلاح می نمایند. آنها مطمئن می شوند که مسئله را می فهمند. اگر مسئله ای نوشته شده باشند ان را با دقت و با توجه عمیق می خوانند، اگر مسئله بطور شفاهی گفته شود، آنها آنقدر سوال می پرسند تا آن را بفهمند. مسئله حل کن های کارا و واقعی به کرات نقشه می ریزند.

پژوهش ها مشخص می کنند که شکست ها یا عدم موفقیت های حل مسئله دانش آموزان غالبا مربوط به فقدان دانش ریاضی آن ها نیست، بلکه متعلق است به استفاده ناموثر و ناکارای آنچه که آن ها می دانند.

مسئله:

دو شیر آب، هر یک به تنهایی به ترتیب در۴ و ۶ ساعت یک مخزن آب را پر می کنند. اگر این دو شیر با هم باز باشند، مخزن در چند ساعت پر از آب می شود؟

استفاده از رویه ها و فرمول ها و الگوریتم ها در حل یک مسئله، بدون درک اینکه آن فرمول چگونه کار می کند و یا اینکه چگونه بدست آمده است کمک چندانی به رشد تفکر ریاضی نخواهد کرد. به مثال زیر توجه کنید:

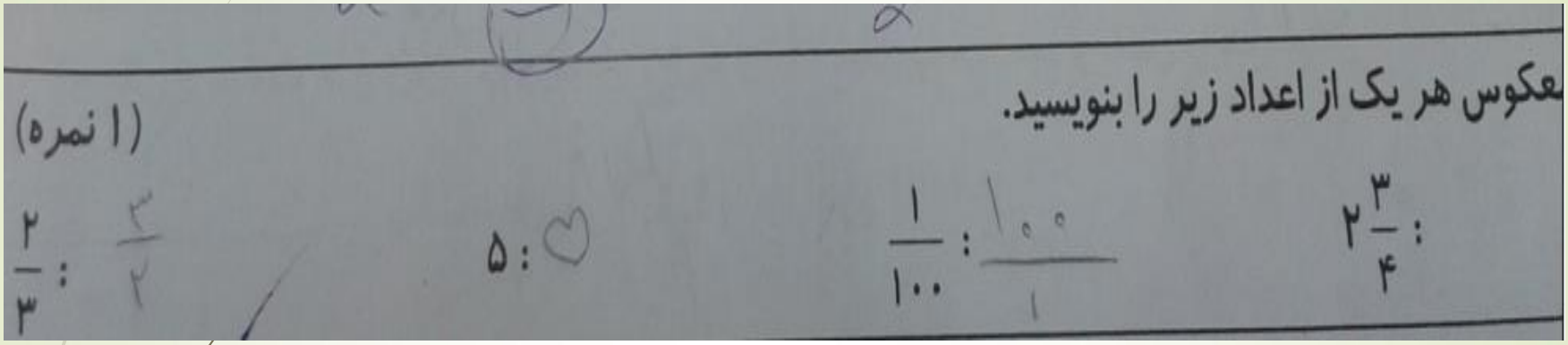
مسئله: دو شیر آب، هر یک به تنهایی به ترتیب در۴ و ۶ ساعت یک مخزن آب را پر می کنند. اگر این دو شیر با هم باز باشند، مخزن در چند ساعت پر از آب می شود؟

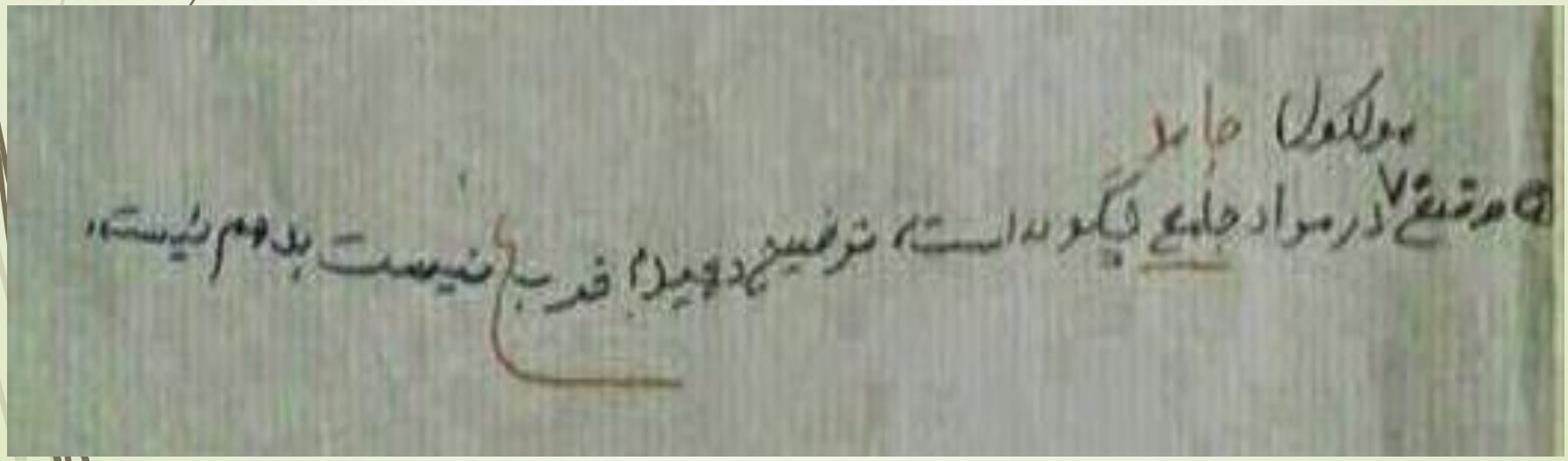
برخی از کتب کمک درسی برای حل مسئله بالا، فرمول زیررا بدون توضیح در مورد چگونگی آن مطرح می کنند:

$$\frac{4 \times 6}{4 + 6} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

$\frac{2}{5}$ ساعت معادل ۲۴ دقیقه است، بنابر این پاسخ ۲ ساعت و ۲۴ دقیقه است.

دانش رویه ای بدون ارتباط مفهومی

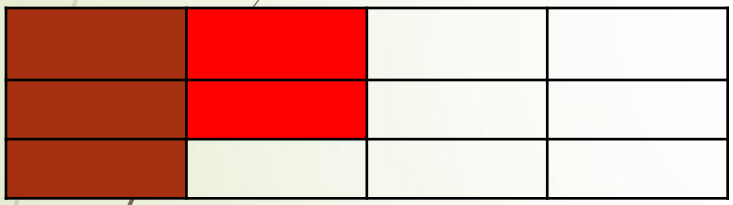




اما می توان به شیوه ای قابل فهم مسئله فوق را حل کرد و یا دستور بالا را توضیح داد:

- مسئله: دو شیر آب، هر یک به تنهایی به ترتیب در۴ و ۶ ساعت یک مخزن آب را پر می کنند. اگر این دو شیر با هم باز باشند، مخزن در چند ساعت پر از آب می شود؟

حجم مخزن را ۱ واحد در نظر می گیریم و با مستطیل بزرگ نشان می دهیم.



- اگر دو شیر با هم یک ساعت کارکنند، شیر اول به تنهایی $\frac{1}{4}$ یا $\frac{3}{12}$ و شیر دوم هم $\frac{1}{6}$ یا $\frac{2}{12}$ حجم مخزن را پر می کند. بنابراین کسری از حجم مخزن که در یک ساعت به وسیله هر دو شیر پر می شود برابر $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$ است. شکل مقابل به فهم مطلب کمک می کند. به کمک تناسبی ساده پاسخ بدست می آید:

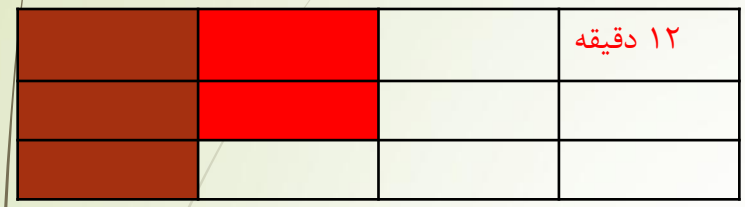
ساعت	1	$\frac{5}{12}$	حجم مخزن
ساعت	x	1	حجم مخزن

$$x=\frac{12}{5}$$

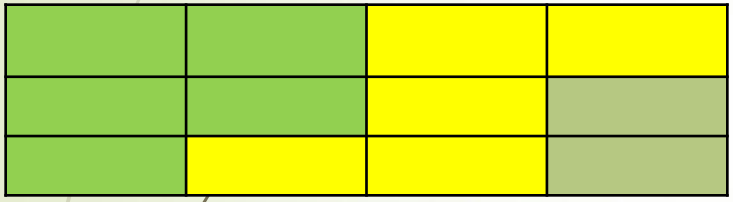
برای مشاهده ویدئوی کامل در مورد این مسئله به آدرس زیر مراجعه فرمایید.

https://aparat.com/v/1EgyW

به روش های دیگری هم می توان پاسخ را بدست آورد:



- اگر دو شیر با هم یک ساعت کارکنند، $\frac{5}{12}$ حجم مخزن پر می شود.پس در مدت ۶۰ دقیقه ۵ تا از مستطیل های کوچک پر می شوند. به کمک شکل می توان دریافت که پر شدن هر مستطیل کوچک ۱۲ دقیقه طول می کشد و چون ۱۲ مستطیل داریم پس در مجموع ۱۴۴ دقیقه یا ۲ ساعت و ۲۴ دقیقه وقت برای پر شدن مخزن لازم است.



- شکل مقابل نشان می دهد که پس از یک ساعت حجمی به اندازه قسمت سبز رنگ و پس از ۲ ساعت حجمی به اندازه مجموع قسمت های سبز رنگ و زرد رنگ از مخزن پر می شود.

بنابر این برای پر کردن قسمت باقی مانده خاکستری $\frac{2}{5}$ ساعت وقت لازم است.

ممکن است افراد به شیوه های دیگری هم پاسخ را بدست آورند. شما چه روشی برای حل این مسئله دارید؟

- روش های مطرح شده پیشنهادی است و به طور فشرده بیان شده اند. طرح و حل چنین مسئله ای نمی تواند به سرعت در کلاس انجام شود و مستلزم اختصاص وقت کافی به دانش آموزان و در نظر گرفتن سطح کلاس و بحث و گفتگوی کلاسی و بررسی و نقد راه حل های مختلف و بررسی اشتباهات احتمالی است. به هر حال نمی توان تنها با ارائه یک فرمول و برچسب هایی مانند تیز هوشان و نظیر آن انتظار داشت که تفکر ریاضی دانش آموزان پرورش یابد.

اسلایدهای ارائه شده در شبکه آموزش ریاضی در پیام رسان های سروش،
ایتا و بله به آدرس @negarmathedu قرار داده می شود.